第２講　漸化式と極限

2　次の漸化式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．ただし $a_1=1$ とする．

(1)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

(2)　$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2^{n+1}+1}{2^n}$

(3)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n$

(4)　$a_{n+1}=\sqrt{a_n}+2$

第２講　漸化式と極限

> 2　次の漸化式によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．ただし $a_1=1$ とする．
>
> (1)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$
>
> (2)　$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2^{n+1}+1}{2^n}$
>
> (3)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n$
>
> (4)　$a_{n+1}=\sqrt{a_n}+2$

【答】 (1)　2　　(2)　3　　(3)　∞　　(4)　4

【解説】 (1)　与式は $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$ と変形できるので，

$a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\to 0\ (n\to\infty)$ より $\lim_{n\to\infty} a_n=2$.

(2)　与式は $2^{n+1}(a_{n+1}-3)-6=\frac{2}{3}\{2^n(a_n-3)-6\}$ と変形できるので

$2^n(a_n-3)-6=\{2^1(a_1-3)-6\}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ より $a_n=3+\frac{3}{2^{n-1}}-5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\to 3\ (n\to\infty)$ なので

$\lim_{n\to\infty} a_n=3$.

(3)　$a_1=1$ より $n=1$ のとき $a_n\geqq n-1$ が成り立つので，$n=k(\geqq 1)$ のとき $a_k\geqq k-1$ の成立を仮定すると，$a_{k+1}\geqq\frac{1}{2}(k-1)+k$ なので $a_{k+1}\geqq(k+1)-1$ が成り立つ．

よって任意の自然数について $a_n\geqq n-1$ が成り立つので $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$.

(4)　与式は $a_{n+1}-4=\frac{1}{\sqrt{a_n}+2}(a_n-4)$ と変形できる．ここで $0<\frac{1}{\sqrt{a_n}+2}\leqq\frac{1}{2}$ より

$$|a_{n+1}-4|=\left|\frac{1}{\sqrt{a_n}+2}(a_n-4)\right|\leqq\frac{1}{2}|a_n-4|$$

となるので $|a_n-4|\leqq|a_1-4|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\to 0\ (n\to\infty)$ より $\lim_{n\to\infty} a_n=4$.